Notes exposé : Géodésiques et complétude

On se donne, pour tout $p \in M$, $\varepsilon_p > 0$ tel que l'application $\exp_p : \underset{T_pM}{\underset{\cap}{B(0,\varepsilon_p)}} \longrightarrow M$ est bien définie.

On pose :

$$F : \bigcup_{p \in M} (\{p\} \times B(0,\varepsilon_p)) \longrightarrow M^2$$
$$(p, v) \longmapsto (p, \exp_p(v))$$

Montrons que F est un difféo local en tout point de $\bigcup_{p\in M} \{p\} \times \underset{T_pM}{\underset{\cap}{\{0\}}}$.

↳ on montre que $TF(p, \underset{T_pM}{\underset{\cap}{0_p}}) : T_pM \times T_pM \longrightarrow T_pM^2$ est inversible.

(analogue de $Df(a) : \underset{\mathbb{R}^n}{T_aU} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^p}{T_{f(a)}V}$)

détails : $T_{(p,0_p)}\left(\bigcup_{q \in M} \{q\} \times B(0_q, \varepsilon_q)\right) = T_{(p,0)}\left(\bigcup \{q\} \times B(0,\varepsilon)\right)$

$\bigcup_{q \in \mathcal{O}} \{q\} \times B(0_q, \varepsilon) \simeq T_p\mathcal{O} \times T_{0_p}(B(0_p,\varepsilon))$

$\mathcal{O} =$ ouvert de M contenant p

$= T_pM \times T_pM$

- $\mathcal{O} \subseteq M \Rightarrow T_p\mathcal{O} = T_pM$

$B(0_p, \varepsilon) \subseteq T_pM \Rightarrow T_{0_p}(B(0_p,\varepsilon)) = T_{0_p} T_pM = T_pM$

Lemme : Soit $f : M_1 \times M_2 \longrightarrow N_1 \times N_2$
$(p_1, p_2) \longmapsto (f_1(p_1), f_2(p_1, p_2))$,

et :

$$Tf : TM_1 \times TM_2 \longrightarrow TN_1 \times TN_2$$
$$(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \longmapsto (Tf_1(\tilde{p}_1), Tf_2(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)).$$

Si $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$, en choisissant des cartes de M_1, M_2, N_1, N_2 autour de $p_1, p_2, f_1(p_1), f_2(p_1, p_2)$, on a :

$$Jf(p_1, p_2) = \left(\begin{array}{c|c} Jf_1(p_1) & 0 \\ \hline Jf_2(\cdot, p_2)(p_1) & Jf_2(p_1, \cdot)(p_2) \end{array}\right)$$

jacobienne en p_1 de $p \longmapsto f(p, p_2)$

jacobienne en p_2 de $p \longmapsto f(p_1, p)$

Dans notre cas : $\cdot\ f = F$
$\cdot\ f_1 : p \longmapsto p$
$\cdot\ f_2 : p, v \longmapsto \exp_p(v)$

$\Rightarrow \cdot\ Tf(p, 0_p) = (id_{T_pM}, Tf_2(p, 0_p))$

$\cdot\ Tf_2(p, 0_p)(\dot{p}, \dot{v}) = Tf_2(\cdot, 0_p)(p)(\dot{p}) + Tf_2(p, \cdot)(0_p)(\dot{v})$

$\cdot\ Jf_2(p, \cdot)(0_p) = J(v \longmapsto \exp_p(v))(0_p)$

$\hookrightarrow$ On s'est alors ramené à l'étude de :

$$f : T_pM \longrightarrow M$$
$$v \longmapsto \exp_p(v),$$

et on va calculer $Tf(0_p)$.

Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte de M définie en p tq $x^1(p) = \ldots = x^n(p) = 0$.

<u>Rappel</u> : $\exp_p(v) = \gamma_{p,v}(1)$, où : $\cdot\ \gamma_{p,v}(0_p) = p$

$\cdot\ \dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$

$\cdot\ \nabla_{\dot{\gamma}_{p,v}} \dot{\gamma}_{p,v} = 0$

Dans la carte $(x^1, \ldots, x^n)$, on a :

$\cdot\ \gamma_{p,v}{}^k(0) = p^k = x^k(p) = 0$

$\cdot\ \dot{\gamma}_{p,v}{}^k(0) = v^k$ (coordonnées dans $(\partial/\partial x^1|_p, \ldots, \partial/\partial x^n|_p)$)

$\cdot\ \ddot{\gamma}_{p,v}{}^k(t) + \Gamma^k_{ij} \dot{\gamma}_{p,v}{}^i(t) \dot{\gamma}_{p,v}{}^j(t) = 0$

<u>Calculs</u> : $\cdot\ \exp_p(0_p + \varepsilon \partial_\ell)^k = \exp_p(\varepsilon \partial_\ell)^k$

$$= \gamma_{p,\varepsilon\partial_\ell}{}^k(1)$$

$$= \gamma_{p,\partial_\ell}{}^k(\varepsilon)$$

$$= \gamma_{p,\partial_\ell}{}^k(0_p) + \varepsilon \dot{\gamma}_{p,\partial_\ell}{}^k(0_p) + o(\varepsilon)$$

$$= \varepsilon \dot{\gamma}_{p,\partial_\ell}{}^k(0_p) + o(\varepsilon)$$

$v = \partial_\ell$

$\cdot\ \exp_p(0_p + \varepsilon \partial_\ell)^k = \varepsilon\, \partial_\ell{}^k + o(\varepsilon) = \varepsilon\, \delta^\ell_k + o(\varepsilon)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial(\partial_\ell)} \exp_p(0_p)^k = \delta^k_\ell$$

$$\Rightarrow J f(0_p) = \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_j)} \exp_p(0_p)^i \right)_{i,j} = \left(\delta^i_j \right)_{i,j} = I_{\dim(M)}$$

D'où, finalement :

$$JF(p,0_p) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ ? & I \end{pmatrix}$$

et :

F difféo local en $(p, 0_p)$.

<u>Lemme</u> : (Voisinage "convexe")

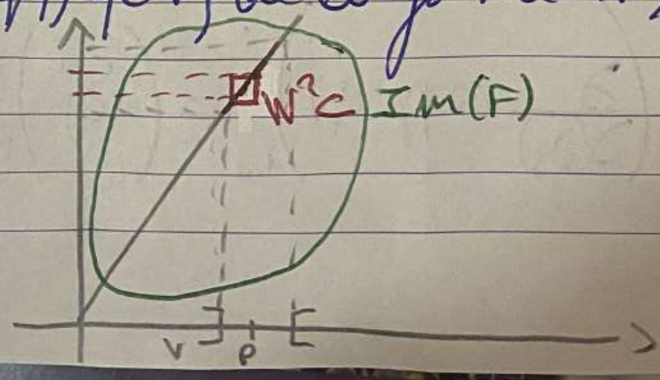
Soit $p \in M$. Alors : il existe C voisinage de p et $\varepsilon > 0$ tq toute paire de points de C est reliée par une unique géodésique (restant dans C) de longueur $\leq \varepsilon$.

$\rightarrow$ Par ce qui précède, F est un difféo local en $(p, 0_p)$.
Il existe V voisinage de p et $\eta \in]0, \varepsilon[$ tels que :

$$F : \bigcup_{q \in V} \{q\} \times B(0_q, \eta) \longrightarrow M^2$$

est un difféo sur son image.

Im (F) est un ouvert contenant $\{(q,q) : q \in V\}$ donc il contient un voisinage de $\{(q,q) : q \in V\}$ de la forme W^2, avec $W \subseteq M$.



Soit alors $q_1, q_2 \in W \subset \mathrm{Im}(F)$. Il existe alors un unique couple (p, v) tq $\|v\| < \varepsilon$ et $(p, \exp_p(v)) = (q_1, q_2)$
On a donc :

$$q_2 = \exp_{q_1}(v).$$

<u>Rappel</u>: pour $\gamma(t) = \exp_{q_1}(tv)$, $\ell(\gamma) = \|v\| < \varepsilon$, $\gamma(0) = q_1$ et $\gamma(1) = q_2$.

<u>Lemme : (Gauss)</u>

Soit $\varepsilon > 0$ tq $\exp_p : B(0, \varepsilon) \subset T_pM \longrightarrow M$ est un difféo. On note $S(p, r) = \{\exp_p(v) : \|v\| = r\}$.
Soit $\gamma : [0, 1] \longrightarrow B(p, \varepsilon)$ une géodésique telle que $\gamma(0) = p$.
Alors :

$$\forall r \leq \varepsilon, \ \gamma \perp S(p, r).$$

<u>Note</u> : $\cdot\ S(p, r) = \exp_p(S(0, r))$
$\cdot\ B(p, r) = \exp_p(B(0, r))$

→ γ est une géodésique, donc $\|\dot\gamma\|$ est une constante.
. Si $\|\dot\gamma\| = 0$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) = p$ et le résultat est immédiat.

. Sinon, quitte à reparamétrer γ, on peut supposer que $\|\dot\gamma\| = \varepsilon$.

On a : - $\gamma(0) = p$;
- $\dot\gamma(0) =: v$, où $\|v\| = \varepsilon$;
- $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$;

donc par définition de $\exp_p$, on a :

$$\forall t \in [0,1], \gamma(t) = \exp_p(tv).$$

On a :

$$T_{\exp_p(\lambda u_0)} S(p,\lambda) = \left\{ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f_0(\lambda, u(t)) \,\Big|\, u : [-1,1] \to S(0,1),\ u(0) = u_0 \right\},$$

où $f_0(\lambda, u(t)) = \exp_p(\lambda u(t))$.

On veut montrer que :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \exp_p(tv) \cdot \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp_p(t_0 \varepsilon u(s)) = 0,$$

avec $u(0) = \frac{1}{\varepsilon} v$.

On pose $f(s,t) = \exp_p(s u(t))$. On veut montrer que :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f(t\varepsilon, 0) \cdot \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(t_0\varepsilon, s) = 0,$$

i.e :

$$\forall s,t,\ \frac{\partial f}{\partial s}(s,t) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(s,t) = 0.$$

Rq : $f(0,t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}(0,t) = 0$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial s}(0,t) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(0,t) = 0$$

On a :

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial r}(r,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial t}(r,t)\right)=\underbrace{\nabla_r\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}}_{=0}+\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\nabla_r\frac{\partial f}{\partial t}$$

$= 0$ car $r\mapsto \exp_p(r u(t))$ est une géodésique

où $\partial r = \frac{d}{dr}\exp_p(rv)$ vecteur associé à la carte $(r,v)\longmapsto \exp_p(rv)$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial f}{\partial r}(r,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial t}(r,t)\right)=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\nabla_r\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\nabla_t\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial f}{\partial r}\right\|$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\|u(t)\|}_{=1=\text{cst}/t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial r}(r,t)\cdot\frac{\partial f}{\partial t}(r,t)\right)=0$$

$$\left(\begin{array}{l}\nabla_r\frac{\partial f}{\partial t}^k=\frac{\partial^2 f^k}{\partial r\partial t}+\Gamma_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial t}^i\frac{\partial f}{\partial r}^j\\ \nabla_t\frac{\partial f}{\partial r}^k=\frac{\partial^2 f^k}{\partial t\partial r}+\Gamma_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial r}^i\frac{\partial f}{\partial t}^j\end{array}\right)$$

Déf : (Fonction rayon)

Soit $q \in B(p, \varepsilon)$. On a : $q = \exp_p(v)$.
On note :
$$r_p(q) = \|v\|.$$

Lemme : Soit $\omega : [0,1] \longrightarrow B(p,\varepsilon) \setminus \{p\}$.
Alors :
$$\ell(\omega) \geq \left| r_p(\omega(1)) - r_p(\omega(0)) \right|,$$
avec égalité si : - ω est radiale (v cte)
- r est monotone (ω ne fait qu'un trajet)

→ On écrit $\omega(t) = \exp_p(r(t)\, v(t))$, avec $r(t) = r_p(\omega(t))$, et on note $\omega(t) = f(r(t), t)$, où $f(r,t) = \exp_p(r\, v(t))$.

Ainsi, on a par règle de la chaîne,
$$\dot{\omega} = \dot{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

⇒ Par le lemme de Gauss et par Pythagore,
$$\|\dot{\omega}\|^2 = |\dot{r}|^2 \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2$$
$$= |\dot{r}|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \geq |\dot{r}|^2$$

$$\Rightarrow \ell(\omega) \geq \left| r_p(\omega(1)) - r_p(\omega(0)) \right|$$

Rq : • $|\dot{r}|^2 + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2 = |\dot{r}|^2 \iff \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2 = 0$

$\iff \|v(t)\|^2 = 0$

$\iff v(t) = 0$

• $\int_0^1 |\dot{r}| = \left|\int_0^1 \dot{r}\right| \iff r$ est de signe cst

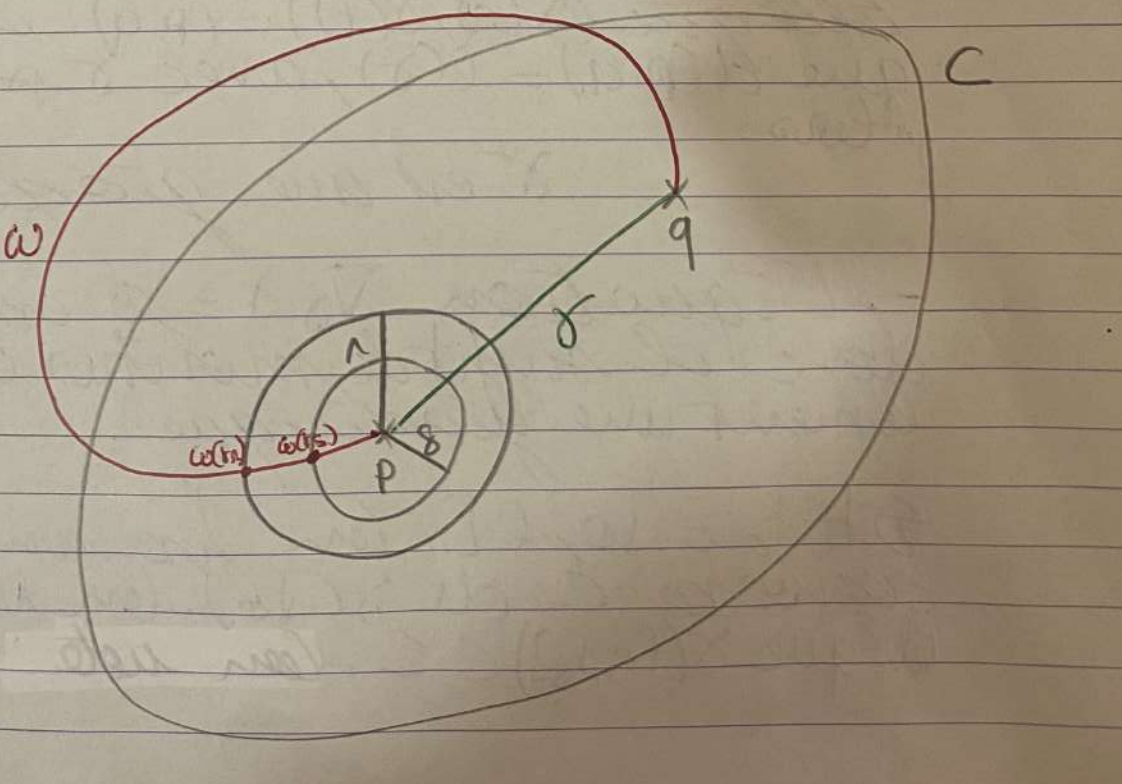
$\iff r$ est monotone

Théorème : (Géodésiques localement minimisantes)

Soit $p \in M$, C un voisinage ε-convexe de p et $q \in C$. On note γ l'unique géodésique qui relie p à q dans C telle que $l(\gamma) < \varepsilon$. Soit de plus $\omega : [0,1] \longrightarrow M$ lisse telle que $(\omega(0), \omega(1)) = (p, q)$.

Alors :

$$l(\gamma) \leq l(\omega).$$



→ Soit $r < \varepsilon$ et $\delta \in]0, r[$. Il existe $t_\delta < t_r$ tels que : – $\omega(t_\delta) \in S(p, \delta)$;
– $\omega(t_r) \in S(p, r)$;
– $\forall t \in [t_\delta, t_r], \omega(t) \in B(p, r)$.

On a alors :

$$\ell(\omega) \geq \ell\left(\omega|_{[t_\delta, t_r]}\right) \geq \left| r_p(\omega(t_r)) - r_p(\omega(t_\delta)) \right|$$

$$= r - \delta \xrightarrow[\substack{r \to \varepsilon \\ \delta \to 0}]{} \varepsilon$$

D'où :

$$\ell(\omega) \geq \varepsilon > \ell(\gamma).$$

Corollaire : Soit $p, q \in M$, $\gamma : [0, \ell] \longrightarrow M$ lisse telle que $(\gamma(0), \gamma(\ell)) = (p, q)$. On suppose que $d(p, q) = \ell(\gamma)$, avec γ ppla.
Alors :

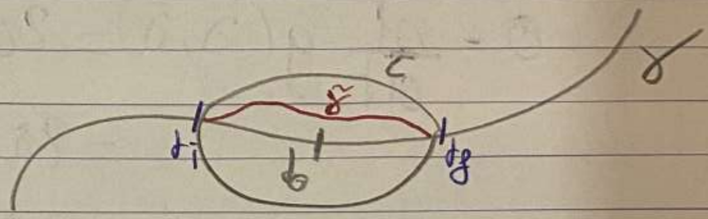
γ est une géodésique.

→ L'équation $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ est locale, donc il suffit de montrer que γ est localement une géodésique.

Soit $t_0 \in]0, \ell[$. On fixe un voisinage convexe C de $\gamma(t_0)$. On note $t_i < t_0 < t_f$ tels que $\gamma([t_i, t_f]) \subset C$.

On note $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow M$ définie par :

- $\tilde{\gamma}|_{[0,t_i]} = \gamma|_{[0,t_i]}$
- $\tilde{\gamma}|_{[t_i,t_f]} =$ géodésique liant $\gamma(t_i)$ à $\gamma(t_f)$ dans C
- $\tilde{\gamma}|_{[t_f,1]} = \gamma|_{[t_f,1]}$



On a alors :

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \ell(\gamma|_{[0,t_i]}) + d(\gamma(t_i), \gamma(t_f)) + \ell(\gamma|_{[t_f,1]})$$
$$\geq d(p,q) = \ell(\gamma)$$
$$\Rightarrow d(\gamma(t_i), \gamma(t_f)) = \ell(\gamma|_{[t_i,t_f]})$$

$\Rightarrow (\omega = \gamma|_{[t_i,t_f]}$ et $q = \gamma(t_i))$

$\hookrightarrow |r(t_f) - r(t_i)| = |r(t_f)|$ car $r(t_i) = r_{\gamma(t_i)}(\gamma(t_i)) = 0$

$= \ell(\tau)$,

où : $\tau(t) = \exp_{\gamma(t_i)}(((t_f - t_i)t + t_i)v)$,

$\ell(\tau) = \|v\| = r_{\gamma(t_i)}(\tau(t_f)) = r(t_f)$.

Donc il existe $s : [t_i, t_f] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissante telle que $\gamma|_{[t_i,t_f]} = \exp_{\gamma(t_i)}(s(t)\, v)$ et v dans $T_{\gamma(t_i)}M$.

$\Rightarrow \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = \ddot{s}\, \dot\gamma$ sur $[t_i, t_f]$

Or, γ est ppla donc :

$$0 = \frac{d}{dt} g(\dot\gamma, \dot\gamma) = 2g(\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma, \dot\gamma)$$
$$= 2\ddot{s}\, g(\dot\gamma, \dot\gamma)$$
$$= 2\ddot{s}$$

$\Rightarrow \ddot{s} = 0$

$\Rightarrow \nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$ et γ est une géodésique sur $[t_i, t_f]$.

Donc : $\forall t \in [t_i, t_f]$, $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma(t) = 0$,

et : $\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma(t_0) = 0$, pour tout $t_0 \in]a, b[$.

<u>Déf :</u> (Géodésique inextensible / complète)

Soit $\gamma : I \longrightarrow M$ est dite inextensible s'il n'existe pas de géodésique $\tilde\gamma : J \longrightarrow M$ avec $I \subsetneq J$ et $\tilde\gamma|_I = \gamma$.

Si $I = \mathbb{R}$, γ est dite complète.

Déf. (Géodésiquement complète)

M est dite géodésiquement complète si l'une des deux conditions équivalentes est vérifiée :

i) $\forall p \in M$, $\exp_p : T_pM \to M$ est bien définie ;

ii) Toutes les géodésiques inextensibles de M sont complètes.

$\to$ i) $\Rightarrow$ ii) : Soit $\gamma : I \to M$ géodésique inextensible et $t_0 \in I$. On pose $p = \gamma(t_0)$ et $v = \dot\gamma(t_0)$.
On pose $\tilde\gamma : \mathbb{R} \to M$
$t \mapsto \exp_p((t-t_0)v)$ de sorte que : $(\tilde\gamma(t_0), \dot{\tilde\gamma}(t_0)) = (p, v)$.

$\Rightarrow$ (C-L) $\tilde\gamma|_I = \gamma$.

Or, γ est inextensible donc $\tilde\gamma = \gamma$ et $I = \mathbb{R}$.

ii) $\Rightarrow$ i) : Soit $p \in M$ et $v \in T_pM$. Alors, $\gamma_{p,v}$ est inextensible (sol° maximale au pb. de Cauchy), donc complète donc $\gamma_{p,v}(1)$ existe, i.e $\exp_p(v)$ existe.

Rappel : (Pseudo distance géodésique) Si M est connexe par arcs, on définit pour tout $p, q \in M$, $d(p,q) = \inf\{ \ell(\gamma) \mid \gamma : [0,1] \to M$ $\mathcal{C}^\infty_{pm}$ tq $(\gamma(0), \gamma(1)) = (p,q) \}$

Lemme : d est localement une distance.

→ On ne démontre pas la symétrie et l'≤Δ.
On va montrer que $d(p,q)=0 \Rightarrow p=q$ (localement). En effet, s'il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(p,\varepsilon)$, alors :

$$\forall \gamma,\ \ell(\gamma) \geq \ell(t \longmapsto \exp_p(tv)) = \|v\|,$$

où $\exp_p(v)=q$. Ainsi, par passage à l'inf,

$$0 = d(p,q) \geq \|v\|,$$

d'où $\|v\|=0$ et $v=0$.

$\Rightarrow q = \exp_p(0) = p$

Rq : si c'était un min, ce serait plié (thm de l'J. nulle etc...)

Dans la suite, on note $\mathcal{T}$ la topologie de la variété. Nous avons la proposition suivante :

Proposition : $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$

→ Soit $p_0 \in M$.

Soit $r>0$. Montrons que $B_d(p_0,r)$ est un voisinage de p_0 pour $\mathcal{T}$.
On note C un voisinage (pour $\mathcal{T}$) r-convexe de p_0. Soit $q \in C$. Il existe une (unique)

géodésique $\gamma : [0,1] \longrightarrow C$ telle que $(\gamma(0),\gamma(1)) = (p_0, q)$ et $l(\gamma) < r$. On a alors $d(p_0,q) \leq l(\gamma) < r$ donc $q \in B_d(p_0, r)$.

Ainsi,

$$C \subset B_d(p_0, r),$$

donc $B_d(p_0,r)$ est un voisinage pour $\mathcal{T}$.

. Soit $x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une carte telle que $x(p_0) = 0$. Soit $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset x(U)$ (au sens de la distance euclidienne).

On a que $(x^{-1}(B(0,\varepsilon)))_{0<\varepsilon<r}$ est une base de voisinages (pour $\mathcal{T}$) de p_0.

Soit $p \in U$ et $v \in T_pM$. On va montrer qu'il existe $a, b > 0$ tq :

$$a\|(v^1, \dots, v^n)\| \leq g_p(v,v) \leq b\|(v^1, \dots, v^n)\|,$$

avec a, b indépendants de p et v.

Pour cela, on munit T_pM de la structure euclidienne donnée par x :

$$\|v\|_{eucl} = \|(v^1, \dots, v^n)\|.$$

L'applicat° $v \longmapsto g_p(v,v)$ est une forme quadratique sur $(T_pM, \|\cdot\|_{eucl})$, donc (par thm spectral) :

$$\lambda_{min}(p)\|v\|^2_{eucl} \leq g_p(v,v) \leq \lambda_{max}(p)\|v\|^2_{eucl}.$$

Soit $U_0 \subset U$ ouvert tel que $p_0 \in U_0$ et $\overline{U_0}$ compact.
On considère alors :

$$U_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad U_0 \longrightarrow \mathbb{R}_+^* .$$
$$p \longmapsto \lambda_{min}(p) \qquad p \longmapsto \lambda_{max}(p)$$

Ces applications sont continues sur un compact donc on peut poser :

$$(a, b) = \left(\left(\min_{U_0} \lambda_{min}\right)^{1/2}, \left(\max_{U_0} \lambda_{max}\right)^{1/2} \right),$$

de sorte que :

$$\forall p \in U_0, \forall v \in T_pM, \ a^2 \|v\|_{eucl}^2 \leq g_p(v,v) \leq b^2 \|v\|_{eucl}^2$$

La famille $\left(x^{-1}(\overline{B}(0,\delta))\right)_{\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}}$ est une base de voisinage de p_0 pour $\mathcal{T}$.
Soit $\delta \in \left]0, \frac{\varepsilon}{2}\right]$. On va montrer que :

$$\exists r > 0, \ B_d(p_0, r) \subset x^{-1}(\overline{B}(0,\delta)).$$

On pose (après un beau brouillon...) :

$$r = 2a\delta.$$

Soit $q \in B_d(p_0, r)$. Il existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ tq $(\gamma(0), \gamma(1)) = (p_0, q)$ et $\ell(\gamma) \leq a\delta$. De plus, il existe également $t_\delta \in [0,1]$ tel que $\gamma([0,t_\delta]) \subset x^{-1}(\overline{B}(0,\delta))$ et $x(\gamma(t_\delta)) \in S(0,\delta)$.
On obtient :

$$a\delta \geq \ell(\gamma) \geq \int_0^{t_\delta} \|\dot\gamma\| \geq a \int_0^{t_\delta} \|\dot\gamma\|_{eucl}$$
$$\geq a \left\| \int_0^{t_\delta} \dot\gamma \right\|_{eucl},$$

d'où :

$$a\delta \geq a \left\| \int_0^{t_\delta} \dot{\gamma} \right\|_{eucl}$$
$$= a \| x(\gamma(t_\delta)) - x(\gamma(0)) \|$$
$$= a\delta.$$

On en déduit donc $\ell(\gamma) = \int_0^{t_\delta} \|\dot{\gamma}\|$, i.e :

$$\int_{t_\delta}^1 \|\dot{\gamma}\| = 0,$$

d'où :

$$\gamma(t_\delta) = \gamma(1) = q.$$

Or, $\gamma(t_\delta) \in x^{-1}(\overline{B}(0,\delta))$ donc $q \in x^{-1}(\overline{B}(0,\delta))$.

Finalement,
$$B_d(p,r) \subset x^{-1}(\overline{B}(0,\delta)).$$

Ccl : $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$

Corollaire : d est une distance.

$\rightarrow$ AQT

Corollaire : Soit $K \subset M$ compact. Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous $p, q \in K$ tels que $d(p,q) < \delta$, il existe une unique géodésique $\gamma : [0,1] \rightarrow K$ telle que $(\gamma(0), \gamma(1)) = (p,q)$ et $\ell(\gamma) < \delta$

$\rightarrow$ Pour tout $x \in K$, il existe C_x un voisi-

voisinage ε_x-convexe de x. On a :

$$K \subset \bigcup_{x\in K} C_x,$$

donc, par compacité, il existe $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_{x_i}.$$

On pose alors $\varepsilon = \min\limits_{1\le i\le n} \varepsilon_{x_i}$.

Soit $p, q \in K$ tels que $d(p,q) < \delta$. Il existe i dans $[\![1,n]\!]$ tel que $p \in C_{x_i}$, d'où :

$$d(p,q) < \delta \le \varepsilon_{x_i},$$

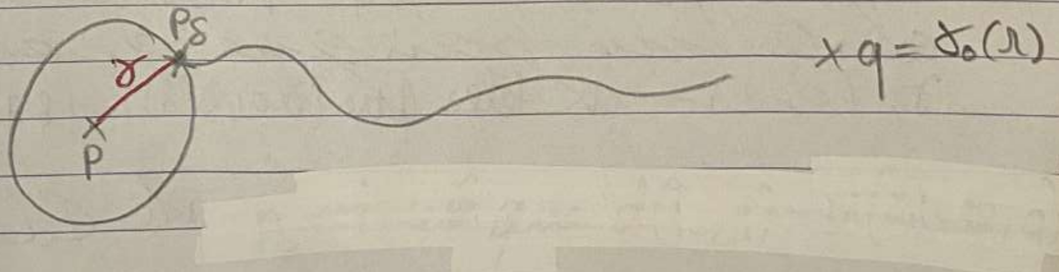
et $q \in B_{géod}(p, \varepsilon_{x_i}) \subset C_{x_i}$.

On déduit alors le résultat par le lemme du voisinage convexe.

Théorème : (Hopf-Rinow)

Si M est géodésiquement complète, alors toute paire de points de M est reliée par une géodésique minimisante.

→ Soit $p, q \in M$ et $\delta > 0$ tel que $B(p,\delta) \subset \exp_p(T_pM)$.



Soit $v \in T_pM$ tel que $p_\delta = \exp_p(\delta v)$ et $\|v\| = 1$, avec p_δ qui vérifie $d(p_\delta, q) = d(\$(p,r), q)$.

On pose $\gamma_0 : \mathbb{R} \longrightarrow M$
$t \longmapsto \exp_p(tv)$.

On a :
$$\gamma_0(0) = p \text{ et } \gamma_0(\delta) = p_\delta.$$

On va montrer que $d(q, \gamma_0(r)) = r - t$, où $r = d(p,q)$, ce qui donnerait :
$$d(\gamma_0(r), q) = 0.$$

On poserait alors $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$
$t \longmapsto \gamma_0(rt)$.

D'où :
$$\ell(\gamma) = \|ru\| = r. \checkmark$$

Montrons que $d(p_\delta, q) = d(p,q) - \delta$ (par double $\leq$).

. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ tq $(\gamma(0), \gamma(1)) = (p,q)$. On fixe t_δ tq $\gamma([0,t_\delta]) \subset B(p,\delta)$ et $\gamma(t_\delta) \in \$(p,\delta)$.
On a :
$$\ell(\gamma) = \ell(\gamma|_{[0,t_\delta]}) + \ell(\gamma|_{[t_\delta,1]})$$
$$= \delta + \ell(\gamma|_{[t_\delta,1]})$$
$$\geq \delta + d(q, \$(p,\delta)) = \delta + d(p_\delta, q)$$

. Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ tq $(\gamma(0), \gamma(1)) = (q, p_\delta)$.
On définit $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow M$ tq $\tilde{\gamma}|_{[0,1/2]}(t) = \gamma(2t)$ et $\tilde{\gamma}|_{[1/2,1]}(t) = \exp_p(2(1-t)\delta v)$.

Ainsi, $(\delta(0), \delta(1)) = (q, p)$,

d'où :
$$l(\delta) = l(\gamma) + \delta \geq d(p,q)$$

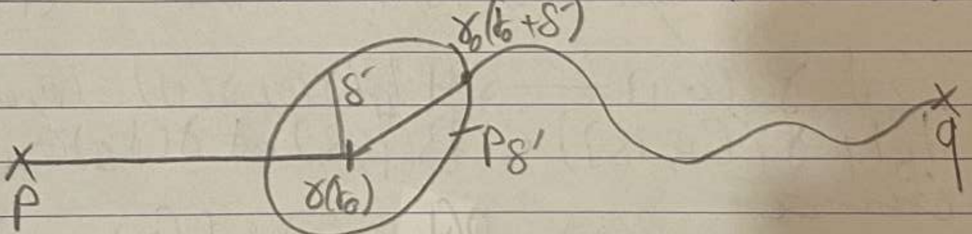
et $d(q, p_\delta) + \delta \geq d(p,q)$.

$\Rightarrow d(q, p_\delta) + \delta = d(p,q)$

Pour tout $t \in [\delta, r]$, on pose :
$$(\mathcal{P}_t) : d(\gamma_0(t), q) + t = d(p,q)$$

On note t_0 le sup des t_0' tq $(\mathcal{P}_t)$ est vraie pour tout $t \in [0, t_0'[$.

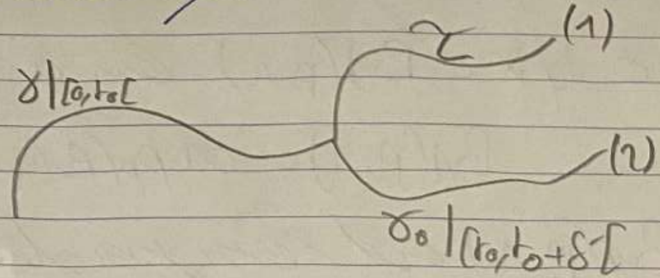
On suppose (par l'absurde) que $t_0 < r$.



Il existe $\delta' > 0$ tq $\exp_{\gamma_0(t_0)} : B(0_{\gamma_0(t_0)}, \delta') \to M$ est un difféo sur son image. On note $p_{\delta'} \in S(\gamma_0(t_0), \delta')$ tq $d(p_{\delta'}, q) = d(q, S(\gamma_0(t_0), \delta'))$.

On a donc : $d(p, p_{\delta'}) \geq t_0 + \delta'$. Le chemin minimisant de p à $p_{\delta'}$ est la concaténation de $\gamma|_{[0,t_0]}$ et la géodésique minimisante de $\gamma_0(t_0)$ à $p_{\delta'}$, notée τ. De plus la longueur vaut $t_0+\delta'$.

Par un corollaire précédent, ce chemin est une géodésique.



(1) = (2)
(par C-L)

En particulier, τ et $\gamma_0|_{[t_0,t_0+\delta[}$ se terminent au même point :

$$p_\delta = \gamma_0(t_0+\delta).$$

Bilan : si $\exp_{\gamma_0(t_0)} : B(0_{\gamma_0(t_0)}, \delta) \to M$ difféo sur son image,

$$\delta + d(\gamma_0(t_0+\delta), q) = d(\gamma_0(t_0), q).$$

Si c'est vrai pour δ, alors c'est vrai pour tout $\delta' \leq \delta$. Donc $(\mathcal{P}_r)$ est vraie pour tout r dans $[t_0, t_0+\delta]$. Or $(\mathcal{P}_r)$ est vraie pour tout $r \in [0, t_0]$.
Ainsi, $(\mathcal{P}_r)$ vraie pour tout $r \in [t_0, t_0+\delta]$: absurde !

Finalement, $t_0 = r$ et le résultat en découle.

Corollaire : Soit M géodésiquement complète. Toute partie fermée bornée de M est compacte.

$\to$ Soit K fermé borné de M et $p \in K$.

L'application $\exp_p : T_pM \to M$ est bien définie par déf. de M.

Soit $r \geq 0$ tq $K \subset B_d(p,r)$. On a :

$$B_d(p,r) = \exp_p(B(0_p,r)),$$

donc $B_d(p,r)$ est compacte.

Ainsi, K est compact.

↳ <u>Conséquence</u> : M est complète en tant qu'espace métrique (i.e toute suite de Cauchy de M converge).

FIN